

بسم الله الرحمن الرحيم

قوانین کپلر و اثبات آنها

آشنایی :

کیهان شناسی همواره یک منبع الهام بخش برای علم بوده است . احتمالاً بسیاری از حرکت های انقلابی در علم از ستاره شناسی شروع شده است . تمدن های قدیم نیز به قوانینی که بر حرکت اجرام آسمانی حکومت می کند پی برده بودند و می دانستند که این کائنات به خودی خود و بدون ترتیب جابجا نمی شوند . تئوری وجود نیرو به بطلموس بر می گردد او اینطور تصور می کرد تمامی اجرام در آسمان به دور زمین می چرخند و حرکت آنها یک حرکت دوار است . بعضی از ستارگان (که بعدها معلوم گشت آنها سیاره بوده اند) حرکاتی نامنظم داشتند و به پارامتر های زیادی جهت تبیین حرکت آنها نیاز بود . این تئوری تخمین های تقریباً دقیقی به دست می داد اما بدست آوردن یک پارامتر آن کاری سخت و طاقت فرسا بود .

در قرن 17 Johannes Kepler با استفاده از اطلاعات جمع آوری شده توسط تیکو براهه 3 قانون زیر را نوشت

1 : هر سیاره در مداری بیضی به دور خورشید که در یکی از کانون های بیضی قرار دارد می چرخد .

2 : شعاع اتصال یا خط واصل خورشید و سیاره مساحت های مساوی را در زمان های مساوی طی

می کند

یا به صورت ریاضی : ثابت $= \frac{1}{2} L = \frac{dA}{dt}$

3 : مربع دوره ی تناوب مداری سیاره متناسب است با مکعب نصف قطر بزرگ مدار

یا به صورت ریاضی : $T^2 \propto a^3$ یا $T^2 = 4\pi^2 a^3$

برای هر سیاره ما به 2 پارامتر بیشتر نیاز نداریم : یکی دوری از مرکز یا e و یکی نصف قطر بزرگ بیضی

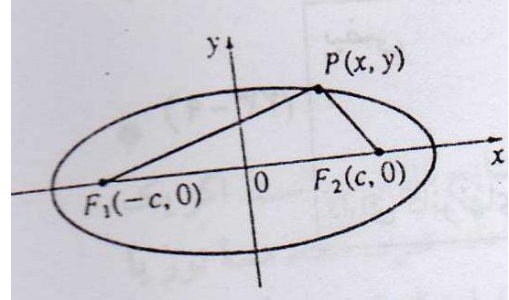
سپس حرکت توسط این 3 قانون توصیف می شود برای مثال قانون دوم سرعت زاویه ای را در هر نقطه از مدار به ما می دهد و می توان دریافت که هر چه سیاره به خورشید بیشتر نزدیک می شود سرعت آن افزایش می یابد و در نهایت قانون سوم سرعت خطی سیاره را به ما می دهد .

در سال 1687 نیوتن در شاهکار خود Philosophiae Naturalis Principia Mathematica قوانین حرکت و

گرانش خود را برای بدست آوردن قوانین 3 گانه ی کپلر به کار برد جالب است بدانید این قوانین به هر جسمی که تحت تاثیر نیروی گرانش دور چیزی می چرخد می توان اعمال کرد .

برای اثبات قانون اول نیوتن می بایست ابتدا معادله ی بیضی را در دستگاه مختصات قطبی داشته باشیم

پس باید معادله ی بیضی در دستگاه دکارتی را داشته باشیم .



$$|PF_1| + |PF_2| = 2a$$

a همان نصف قطر بزرگ بیضی است اثبات رابطه ی بالا :

می دانیم که بیضی را توسط یک نخ که 2 سر آن به F ها بسته شده است بوجود می آورند پس طول نخ برابر با $|PF_1| + |PF_2|$ می باشد نوک مداد را در p قرار می دهیم و بیضی را می کشیم هنگامی که نوک مداد محور x ها را قطع کرد اندازه ی آن 2a می شود .

$$\sqrt{(x+c)^2 + y^2} + \sqrt{(x-c)^2 + y^2} = 2a$$

c فاصله ی یکی از کانون ها تا مرکز بیضی است .

$$\sqrt{(x+c)^2 + y^2} = 2a - \sqrt{(x-c)^2 + y^2}$$

2 طرف را به توان 2 می رسانیم .

$$x^2 - 2cx + c^2 + y^2 = 4a^2 - 4a\sqrt{(x+c)^2 + y^2} + x^2 + 2cx + c^2 + y^2$$

که به صورت زیر ساده می شود .

$$a\sqrt{(x+c)^2 + y^2} = a^2 + cx$$

2 طرف را به توان 2 می رسانیم .

$$a^2(x^2 + 2cx + c^2 + y^2) = a^4 + 2a^2cx + c^2x^2$$

a^2 را در پرانتز اثر می دهیم عبارت $2a^2cx$ از 2 طرف حذف می شود جای عبارت a^2x^2 را با عبارت c^2x^2

تعویض می کنیم در راست از a^2 و در سمت چپ از x^2 فاکتور می گیریم .

$$(a^2 - c^2)x^2 + a^2y^2 = a^2(a^2 - c^2)$$

برای راحتی فرض می کنیم $b^2 = a^2 - c^2$ و می دانیم که b همان نصف قطر کوچک بیضی است بوسیله

قضیه ی فیثاغورس رابطه ی بالا به سادگی بدست می آید . با جایگذاری داریم .

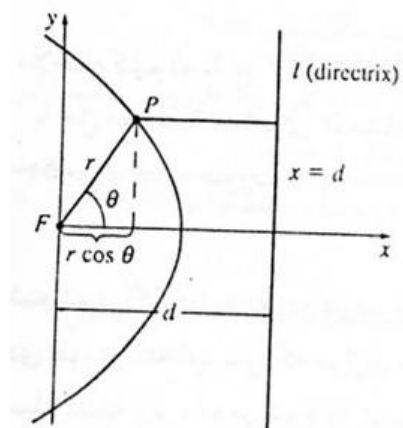
$$b^2x^2 + a^2y^2 = a^2b^2$$

2 طرف را بر a^2b^2 تقسیم می کنیم .

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

رابطه ی بالا معادله ی بیضی در دستگاه مختصات دکارتی است .

حال می خواهیم معادله ی بیضی را در دستگاه مختصات قطبی پیدا کنیم .



$$|PF| = r$$

$$|Pl| = d - r \cos \theta$$

$$e = \frac{c}{a}$$

e را برون مرکزی بیضی می نامند و با رابطه ی بالا می شناسند . در مختصات قطبی e اینگونه است .

$$\frac{|PF|}{|Pl|} = e$$

در جریان محاسبه می بینیم که این رابطه درست است . پس داریم .

$$r = e(d - r \cos \theta)$$

$$r^2 = x^2 + y^2 \text{ و } x = r \cos \theta \text{ که دانیم}$$

2 طرف را مربع می کنیم عبارات بالا را جایگزین می کنیم .

$$x^2 + y^2 = e^2(d^2 - 2dx + x^2)$$

e^2 را در پرانتز اثر می دهیم و عبارات e^2x^2 و $-2e^2dx$ را به سمت چپ می بریم و از x^2 فاکتور

می گیریم .

$$(1 - e^2)x^2 + 2e^2dx + y^2 = e^2d^2$$

2 طرف را بر عبارت $(1 - e^2)$ تقسیم می کنیم . به 2 طرف عبارت $\left(\frac{de^2}{1-e^2}\right)^2$ را اضافه می کنیم . این عمل را انجام دادیم تا عبارت زیر بدست آید .

$$\left(x + \frac{e^2 d}{1 - e^2}\right)^2 + \frac{y^2}{1 - e^2} = \frac{e^2 d^2}{(1 - e^2)^2}$$

اگر عبارات زیر را داشته باشیم :

$$h = -\frac{e^2 d}{1 - e^2}, \quad a^2 = \frac{e^2 d^2}{(1 - e^2)^2}, \quad b^2 = \frac{e^2 d^2}{1 - e^2}$$

عبارت به صورت زیر در می آید :

$$\frac{(x - h)^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

که معادله ی یک بیضی است حال برای آنکه بدانیم تعریف ما از e درست است e را می نویسیم

$$c^2 = a^2 - b^2$$

$$c^2 = \frac{e^2 d^2}{(1 - e^2)^2} - \frac{e^2 d^2}{1 - e^2}$$

$$c^2 = \frac{e^2 d^2 - e^2 d^2 (1 - e^2)}{(1 - e^2)^2}$$

$$c^2 = \frac{e^4 d^2}{(1 - e^2)^2}$$

$$c = \frac{e^2 d}{1 - e^2}$$

$$a = \frac{ed}{1 - e^2}$$

$$\frac{c}{a} = e$$

همان چیزی که انتظار آن را داشتیم پس معادله ی بیضی در دستگاه مختصات قطبی چنین است :

$$r = \frac{ed}{1 + e \cos \theta}$$

اثبات قوانین کپلر :

قانون اول :

همانطور که قبلا نیز گفته شد قانون اول بیان می کند که هر جسمی که تحت تاثیر نیروی گرانش جسم دیگری باشد در مداری بیضوی دور آن می چرخد .

2 اثبات برای این قانون اینجا ذکر می کنیم .

اثبات 1 :

برای اثبات این که سیاره بیضوی می چرخد ابتدا باید ثابت کنیم که در یک صفحه می چرخد لذا داریم

قانون دوم نیوتن : $F = ma$

$$F = -\frac{GMm}{r^3} \mathbf{r} = -\frac{GMm}{r^2} \mathbf{u} \quad \text{قانون گرانش نیوتن :}$$

ابتدا باید عرض کنم حروفی که کج نوشته شده اند نشاندهنده ی اندازه اند و حروفی که به صورت معمولی نوشته شده اند نشاندهنده ی بردار اند .

F نیروی گرانشی روی سیاره ، m و M جرم سیارات به ترتیب جرم دور زننده و جرم ثابت می باشند

G ثابت گرانش ، $r = |\mathbf{r}|$ و $\mathbf{u} = \left(\frac{1}{r}\right) \mathbf{r}$ بردار یکه در سوی \mathbf{r} می باشد .

F های 2 قانون را برابر با هم قرار می دهیم .

$$ma = -\frac{GMm}{r^3} \mathbf{r}$$

m ها از طرفین ساده می شوند .

$$a = -\frac{GM}{r^3} \mathbf{r}$$

و بنابراین می فهمیم که بردار a ضریبی از بردار \mathbf{r} است پس موازیند و داریم .

$$\mathbf{r} \times \mathbf{a} = 0$$

$$\frac{d}{dt}(\mathbf{r} \times \mathbf{v}) = \dot{\mathbf{r}} \times \mathbf{v} + \mathbf{r} \times \dot{\mathbf{v}}$$

$$\frac{d}{dt}(\mathbf{r} \times \mathbf{v}) = \mathbf{v} \times \mathbf{v} + \mathbf{r} \times \mathbf{a} = 0 + 0 + 0$$

\mathbf{v} بردار سرعت است بنا بر این داریم :

$$\mathbf{r} \times \mathbf{v} = \mathbf{h}$$

که در آن \mathbf{h} یک بردار ثابت است و حال اگر فرض کنیم که $\mathbf{h} \neq 0$ نتیجه می شود که بردار ثابت \mathbf{h} بر 2 بردار

r و v عمود است پس بردار r و بردار v هر دو در یک صفحه اند .
 می دانیم که بردار سرعت همواره بر مسیر حرکت مماس می باشد پس مدار بر یک صفحه قرار دارد .
 از بردار ثابت h شروع می کنیم به اثبات قانون اول کپلر داریم :

$$h = r \times v = r \times \dot{r} = r u \times (\dot{r}u)$$

$$h = r u \times (r \dot{u} + \dot{r}u) = r^2(u \times \dot{u}) + r \dot{r}(u \times u)$$

$$h = r^2(u \times \dot{u})$$

پس بنابر این داریم :

$$a \times h = \frac{-GM}{r^2} u \times r^2(u \times \dot{u}) = -GM u \times (u \times \dot{u})$$

قضیه ای است در مورد ضرب خارجی که بیان می کند که :

$$a \times (b \times c) = (a \cdot c)b - (a \cdot b)c$$

جای اثبات این قضیه نیست آن را می پذیریم و ادامه می دهیم .

داشته باشد آنگاه بردار مکان بر بردار مماس آن عمود است پس در اینجا $u \cdot \dot{u} = 0$

$$a \times h = -GM \dot{u}$$

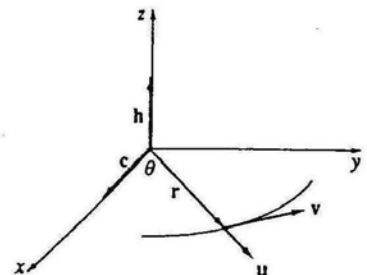
$$(\dot{v} \times h) = \dot{v} \times h = a \times h = GM \dot{u}$$

با انتگرال گیری از 2 طرف داریم :

$$v \times h = GM u + c$$

که در آن c یک بردار ثابت است .

در اینجا انتخاب محور های مختصات به طوری که بردار پایه استاندارد K در سوی بردار h باشد مناسب است . در این صورت سیاره در صفحه xy حرکت می کند . چون هر دوی $v \times h$ و u بر h عمودند برابری بالا نشان می دهد که c در صفحه xy قرار دارد یعنی می توانیم محور x و محور y را طوری انتخاب کنیم که همان طور که در شکل نشان داده شده است بردار i در سوی c قرار گیرد .



اگر θ زاویه ی بین c و v باشد آنگاه (r, θ) مختصات قطبی سیاره می باشند از برابری بالا داریم .

$$r \cdot (v \times h) = r \cdot (Gmu + c) = GMr \cdot u + r \cdot c$$

$$r \cdot (v \times h) = GMru \cdot u + |r||c| \cos \theta$$

$$r \cdot (v \times h) = GMr + rc \cos \theta$$

اگر از r در سمت راست معادله فاکتور بگیریم و 2 جمله را بر عبارت $GM + c \cos \theta$ تقسیم کنیم داریم

$$r = \frac{r \cdot (v \times h)}{GM + c \cos \theta} = \frac{1}{GM} \times \frac{r \cdot (v \times h)}{1 + e \cos \theta}$$

$$e = \frac{c}{GM}$$

در جای دیگر داریم

$$r \cdot (v \times h) = (r \times v) \cdot h = h \cdot h = h^2$$

$$r = \frac{\frac{h^2}{GM}}{1 + e \cos \theta} = \frac{\frac{eh^2}{c}}{1 + e \cos \theta}$$

و اگر داشته باشیم $d = \frac{h^2}{c}$ داریم

$$r = \frac{ed}{1 + e \cos \theta}$$

و این همان معادله ی قطبی بیضی است .

اثبات 2 :

اثبات دوم قانون اول کپلر از طریق انرژی و تکانه ی زاویه ای سیاره محاسبه می شود . برای این اثبات ابتدا باید مفاهیمی را مقدمه بنویسیم :

تبدیل دستگاه مختصات دکارتی به قطبی :

$$\begin{cases} x = r \cos \theta \\ y = r \sin \theta \end{cases}$$

از هر 2 و از هر 2 طرف آنها دیفرانسیل می گیریم .

$$\begin{cases} \dot{x} = \dot{r} \cos \theta - \dot{\theta} r \sin \theta \\ \dot{y} = \dot{r} \sin \theta + \dot{\theta} r \cos \theta \end{cases}$$

$$\dot{r}^2 = \dot{x}^2 + \dot{y}^2$$

$$\dot{r}^2 = \dot{r}^2 \cos^2 \theta + \dot{\theta}^2 r^2 \sin^2 \theta - 2\dot{r}\dot{\theta} \cos \theta \sin \theta + \dot{r}^2 \sin^2 \theta + \dot{\theta}^2 r^2 \cos^2 \theta + 2\dot{r}\dot{\theta} \cos \theta \sin \theta$$

عبارت $2\dot{r}\dot{\theta} \cos \theta \sin \theta$ از بین می رود از \dot{r}^2 و $\dot{\theta}^2 r^2$ فاکتور می گیریم .

$$\dot{r}^2 = \dot{r}^2(\sin^2 \theta + \cos^2 \theta) + \dot{\theta}^2 r^2(\sin^2 \theta + \cos^2 \theta)$$

$$\dot{r}^2 = \dot{r}^2 + r^2 \dot{\theta}^2$$

انرژی :

انرژی را ما همیشه به صورت جمع انرژی جنبشی و پتانسیل داشتیم حال نیز این کار را می کنیم . اما ما برای راحتی کار واحد دستگاه را طوری انتخاب می کنیم تا m و GM هر 2 برابر با 1 شوند .

$$k = \frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2}m\dot{r}^2$$

$$k = \frac{1}{2}\dot{r}^2$$

$$U = -w = -Fr$$

رابطه ی F همان نیروی گرانش است . پس :

$$U = -\frac{GMm}{r^2}r$$

ساده می شود به صورت زیر :

$$U = -\frac{1}{r}$$

$$E = k + U$$

$$E = \frac{1}{2}\dot{r}^2 - \frac{1}{r}$$

تکانه ی زاویه ای :

$$L = r \times m\dot{r}$$

$$L = r \times \dot{r}$$

$$r \times \dot{r} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ x & y & 0 \\ \dot{x} & \dot{y} & 0 \end{vmatrix} = (x\dot{y} - \dot{x}y)\mathbf{k}$$

$$r \times \dot{r} = (r \cos \theta (\dot{r} \sin \theta + \dot{\theta} r \cos \theta) - r \sin \theta (\dot{r} \cos \theta - \dot{\theta} r \sin \theta))$$

$$r \times \dot{r} = r^2 \dot{\theta} \mathbf{k}$$

$$L = r^2 \dot{\theta}$$

$$E = \frac{1}{2}(\dot{r}^2 + r^2 \dot{\theta}^2) - \frac{1}{r}$$

$\frac{1}{2}$ را در پراتنز اثر می دهیم و به جای θ عبارت $\frac{L}{r^2}$ را قرار می دهیم .

$$E = \frac{1}{2}\dot{r}^2 + \frac{L^2}{2r^2} - \frac{1}{r}$$

عبارت $\frac{L^2}{2r^2} - \frac{1}{r}$ را به سمت چپ می بریم و تمام معادله را در 2 ضرب می کنیم داریم :

$$\frac{dr}{d\theta} = \frac{\dot{r}}{\dot{\theta}}$$

$$\dot{r}^2 = 2E + \frac{2}{r} - \frac{L^2}{r^2}$$

$$\dot{\theta}^2 = \frac{L^2}{r^4}$$

2 عبارت بالا را بر هم تقسیم می کنیم .

$$\left(\frac{dr}{d\theta}\right)^2 = \frac{1}{L^2}(2Er^4 + 2r^3 - L^2r^2)$$

از 2 طرف دیفرانسیل می گیریم :

$$2\frac{dr}{d\theta}\frac{d^2r}{d\theta^2} = \frac{1}{L^2}(8Er^3 + 6r^2 - 2L^2r)\frac{dr}{d\theta}$$

معادله را بر $2\frac{dr}{d\theta}$ تقسیم می کنیم .

$$\frac{d^2r}{d\theta^2} = \frac{1}{L^2}(4Er^3 + 3r^2 - L^2r)$$

یک تغییر متغیر می تواند به ما کمک کند

$$u = \frac{1}{r}$$

از 2 طرف دیفرانسیل نسبت به θ می گیریم .

$$\frac{du}{d\theta} = -\frac{1}{r^2}\frac{dr}{d\theta}$$

یک بار دیگر دیفرانسیل می گیریم .

$$\frac{d^2u}{d\theta^2} = -\frac{1}{r^2}\frac{d^2r}{d\theta^2} + \frac{2}{r^3}\left(\frac{dr}{d\theta}\right)^2$$

با جایگذاری داریم :

$$\frac{d^2u}{d\theta^2} = -\frac{1}{r^2L^2}(4Er^3 + 3r^2 - L^2r) + \frac{2}{r^3L^2}(2Er^4 + 2r^3 - L^2r^2)$$

ساده می کنیم :

$$\frac{d^2u}{d\theta^2} = \frac{1}{L^2} - \frac{1}{r} = \frac{1}{L^2} - u$$

u به سمت چپ می بریم .

$$\frac{d^2u}{d\theta^2} + u = \frac{1}{L^2}$$

حال به یاد بیاورید این روابط را :

$$\begin{cases} x = r\cos\theta \\ y = r\sin\theta \end{cases}$$

$$\begin{cases} \frac{1}{r} = \frac{\cos\theta}{x} \\ \frac{1}{r} = \frac{\sin\theta}{y} \end{cases}$$

$$\begin{cases} u = \frac{\cos\theta}{x} \\ u = \frac{\sin\theta}{y} \end{cases}$$

از هر 2 و از هر 2 طرف نسبت به θ دیفرانسیل می گیریم .

$$\begin{cases} \frac{du}{d\theta} = -\frac{1}{x}\sin\theta \\ \frac{du}{d\theta} = \frac{1}{y}\cos\theta \end{cases}$$

از هر 2 و از هر 2 طرف نسبت به θ دیفرانسیل می گیریم .

$$\begin{cases} \frac{d^2u}{d\theta^2} = -\frac{1}{x}\cos\theta \\ \frac{d^2u}{d\theta^2} = -\frac{1}{y}\sin\theta \end{cases}$$

حال دیدیم که مشتق دوم u ضربی از سینوس و کسینوس است .

پس داریم :

$$u = \frac{1}{L^2} = k \cos \theta$$

دوباره u را به $\frac{1}{r}$ تبدیل می کنیم . و به جای kL^2 برون مرکزی e را قرار می دهیم .

$$r = \frac{L^2}{1 + e \cos \theta}$$

که مشاهده می کنیم مختصات قطبی یک بیضی را به ما می دهد .

قانون دوم :

همان طور که ذکر شد این قانون بیان می کند که سیاره مساحت های مساوی را در زمان های مساوی طی می کند .

برای اثبات ما داشتیم :

$$\frac{d\theta}{dt} = \frac{L}{r^2}$$

و می دانیم مساحت حاصل از یک شعاع که بیضی را جارو می کند با رابطه ی زیر داده می شود .

$$A(\theta) = \frac{1}{2} \int_0^\theta r^2 d\theta$$

از 2 طرف دیفرانسیل می گیریم .

$$\frac{dA}{d\theta} = \frac{1}{2} r^2$$

$$\frac{dA}{dt} = \frac{dA}{d\theta} \frac{d\theta}{dt} = \frac{1}{2} r^2 \frac{L}{r^2} = \frac{1}{2} L$$

حال باید ثابت کنیم که L مقداری ثابت دارد . پس دیفرانسیل آن باید صفر شود .

2 عبارت پایین را به خاطر بیاورید :

قانون دوم نیوتن : $F = ma$

قانون گرانش نیوتن : $F = -\frac{GMm}{r^3} r$

$$a = \ddot{r} = -\frac{r}{r^3}$$

$$r \times \dot{r} = L$$

از 2 طرف دیفرانسیل می گیریم .

$$\dot{L} = \dot{r} \times \dot{r} + r \times \ddot{r} = r \times \left(-\frac{r}{r^3} \right) = -\frac{1}{r^3} r \times r = 0$$

پس L مقداری ثابت دارد پس قانون دوم ثابت می شود .

قانون سوم :

در این قانون ما می بایست رابطه ای بین مربع دوره ی تناوب سیاره دور خورشید و مکعب نصف قطر بزرگ مدار سیاره پیدا کنیم .

رابطه ی زیر را بخاطر بیاورید .

$$\frac{d\theta}{dt} = \frac{L}{r^2}$$

$$\frac{dt}{d\theta} = \frac{r^2}{L}$$

دوره را انتگرال روی بازه های زمانی گرفت .

$$T = \int_0^T dt = \int_0^{2\pi} \frac{dt}{d\theta} d\theta = \frac{1}{L} \int_0^{2\pi} r^2 d\theta$$

مقدار ثابت شده در اثبات قانون اول بروش اول را بجای r قرار می دهیم .

$$T = L^3 \int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{(1 + e \cos \theta)^2} = \frac{2\pi L^3}{(1 - e^2)^{\frac{3}{2}}}$$

می دانیم که اگر نزدیکترین فاصله ی سیاره را با r(min) و دورترین فاصله سیاره از خورشید را با r(max)

نشان دهیم این روابط را داریم :

$$r_{max} + r_{min} = 2a$$

$$r_{max} - r_{min} = 2c$$

$$e = \frac{c}{a} = \frac{r_{max} - r_{min}}{r_{max} + r_{min}}$$

اگر به 2 طرف مقدار یک را اضافه کنیم داریم .

$$1 + e = \frac{2r_{max}}{r_{max} + r_{min}}$$

و اگر همان رابطه ی قبلی را در منفی ضرب کنیم و مقدار یک را به آن اضافه کنیم داریم .

$$1 - e = \frac{2r_{min}}{r_{max} + r_{min}}$$

حال 2 رابطه ی بدست آمده را در هم ضرب می کنیم .

$$1 - e^2 = \frac{4r_{max}r_{min}}{(r_{max} + r_{min})^2} = \frac{r_{max}r_{min}}{a^2}$$

$$r_{min} = \frac{L^2}{1 + e \cos \theta}$$

$$L^2 = r_{min}(1 + e)$$

داریم :

$$c = ea$$

2 طرف را در 2 ضرب می کنیم .

$$2c = 2ae$$

$$r_{max} - r_{min} = e(r_{max} + r_{min})$$

$$(1 - e)r_{max} = (1 + e)r_{min}$$

$$L^2 = r_{max}(1 - e)$$

$$\frac{L^2}{r_{min}} = 1 + e$$

$$\frac{L^2}{r_{max}} = 1 - e$$

2 عبارت بالا را با هم جمع می کنیم .

$$L^2 \left(\frac{1}{r_{min}} + \frac{1}{r_{max}} \right) = 2$$

$$L^2 = \frac{2r_{max}r_{min}}{r_{max} + r_{min}} = \frac{r_{max}r_{min}}{a}$$

این عبارت را داشتیم که :

$$1 - e^2 = \frac{r_{max}r_{min}}{a^2}$$

بجای $r_{max}r_{min}$ عبارت $a^2(1 - e^2)$ را قرار می دهیم .

$$\frac{L^2}{1 - e^2} = a$$

$$T = \frac{2\pi L^3}{(1 - e^2)^{\frac{3}{2}}}$$

$$T^2 = \frac{4\pi^2 L^6}{(1 - e^2)^3} = 4\pi^2 a^3$$

پس قانون سوم هم اثبات شد ...

نویسنده : رضا نادری

منابع :

مقاله ای از Gilbert Weinstein به نام قوانین کپلر

کتاب Calculus Differential & Integral نوشته ی جیمز استوارت

کتاب آشنایی با مکانیک اثر دانیل کلپنر